Schranken für die Nullstellen komplexwertiger Polynome

Abstract. In diesem Paper werden drei neue Nullstellenschranken angegeben. Einzuorden sind diese Sätze in der *analytischen Theorie der Polynome.* Diese Theorie befaßt sich mit den Eigenschaften von komplexwertigen Polynomen, die als besondere analytische (holomorphe) Funktionen aufgefaßt werden.

Ein großer Teil der analytischen Theorie der Polynome, beschäftigt sich damit, Kreisbereiche K mit Mittelpunkt z_0 zu bestimmen, so daß entweder alle oder mindestens p $(1 \leq p \leq n)$ Nullstellen von f, ein komplexwertiges Polynom n-ten Grades, im Inneren oder auf dem Rand dieses Kreises liegen. Dabei hängen diese Schranken von den Koeffizienten des vorgelegten Polynoms ab. Formal kann dies folgendermaßen formuliert werden:
Es sei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \; a_i \in \mathbb{C}, n \geq 1.$$

Konstruiere eine Schranke $\mathcal{S} = \mathcal{S}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, so daß entweder alle oder mindestens p $(1 \leq p \leq n)$ Nullstellen von f im Kreisbereich

$$K(z_0, \mathcal{S}(a_0, a_1, \ldots, a_n)) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \mathcal{S}(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$$

liegen, wobei man o.B.d.A $z_0 = 0$ setzen kann.

1 Neue Schrankensätze

Man betrachte die Abschätzung für den Betrag von f

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - \{|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_0|\}.\end{aligned}$$

Es sei $M := \max\limits_{0\leq j\leq n-1}\left|\dfrac{a_j}{a_n}\right|$. Es folgt

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |a_n||z|^n - \{|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_0|\} \\ &= |a_n|\left[|z|^n - \left\{\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}|z|^{n-1} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right\}\right] \\ &\geq |a_n|\left[|z|^n - M\{|z|^{n-1} + \cdots + 1\}\right].\end{aligned}$$

Im weiteren wird die bekannte *Hölderungleichung*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

für $a_j, b_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$, $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ benutzt.
Mit der *Hölderungleichung* (s. [1]) folgt weiter

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |a_n|\left[|z|^n - M\{|z|^{n-1} + \cdots + 1\}\right] \\ &\geq |a_n|\left[|z|^n - M\left(\sum_{j=0}^{n-1}|z|^{jp}\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{j=0}^{n-1}|z|^{jp} = \sum_{j=0}^{n-1}(|z|^p)^j = \frac{1-|z|^{np}}{1-|z|^p} = \frac{|z|^{np}-1}{|z|^p-1},$$

erhält man nun

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |a_n|\left[|z|^n - M\left(\frac{|z|^{np}-1}{|z|^p-1}\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}}\right] \\ &> |a_n|\left[|z|^n - \frac{M|z|^n}{(|z|^p-1)^{\frac{1}{p}}}n^{\frac{1}{q}}\right] \\ &= |a_n||z|^n\left[\frac{(|z|^p-1)^{\frac{1}{p}} - Mn^{\frac{1}{q}}}{(|z|^p-1)^{\frac{1}{p}}}\right],\end{aligned}$$

im Falle $|z| > 1$. Es folgt $|f(z)| > 0$, falls

$$(|z|^p - 1)^{\frac{1}{p}} - Mn^{\frac{1}{q}} > 0 \Longleftrightarrow |z| > \left(1 + M^p n^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

$\square$

Damit hat man den folgenden Satz erhalten.

Satz 1 *Es seien $p, q > 1$ und es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann liegen alle Nullstellen des Polynoms*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \, , \; a_n \neq 0 \, , \; n \geq 1 \, , \; a_i \in \mathbb{C} \, , \; i = 0, 1, \cdots, n$$

im Kreisbereich $K\left(0, \;\left\{1 + M^p n^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}}\right)$, wobei M mit

$$M := \max_{0 \leq j \leq n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|$$

bezeichnet wird.

Als triviale Folgerung gilt auch

Corollar 2 *Es seien $p, q > 1$ und es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann liegen alle Nullstellen des Polynoms*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \, , \; a_n \neq 0 \, , \; n \geq 1 \, , \; a_i \in \mathbb{C} \, , \; i = 0, 1, \cdots, n$$

im Kreisbereich $K\left(0, 1 + \; M^p n^{\frac{p}{q}}\right)$.

Der nächste Satz gibt eine Nullstellenschranke an, die wiederum von positiven Nullstellen eines Begleitpolynoms abhängt.

Satz 3 *Es sei das Polynom*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \, , \; a_n \neq 0 \, , \; a_k \in \mathbb{C} \, , \; k = 0, 1, \cdots, n.$$

Alle Nullstellen von f liegen im Kreisbereich $K(0, \; \max(1, \delta))$, wobei δ die von 1 verschiedene positive Wurzel der Gleichung

$$|z|^{n+1} - (1 + M)|z|^n + M = 0$$

bezeichnet.

Beweis: Wieder ausgehend von

$$|f(z)| \geq |a_n| \left[|z|^n - M\{|z|^{n-1} + \cdots + 1\}\right],$$

erhält man

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_n| \left[|z|^n - M\{|z|^{n-1} + \cdots + 1\}\right] \\ &= |a_n| \left[|z|^n - M \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}\right] \\ &= |a_n| \left[\frac{|z|^{n+1} - |z|^n(1+M) + M}{|z| - 1}\right]. \end{aligned}$$

Definiere

$$F(z) := |z|^{n+1} - |z|^n(1+M) + M.$$

Nach der *Vorzeichenregel von Descartes* (s. [2]) folgt, daß F genau zwei positive Nullstellen besitzt.

Da

$$F(1) = 1 - (1+M) + M = 0,$$

ist $z = 1$ Nullstelle von F. Es gilt außerdem

$$\operatorname{sign}\{F(0)\} = 1.$$

Weil F genau zwei positive Nullstellen 1 und δ besitzt, folgt

$$\operatorname{sign}\{F(\infty)\} = 1.$$

Damit ist also

$$|F(z)| > 0 \text{ und deswegen } |f(z)| > 0, \text{ für } \quad |z| > \max(1, \delta).$$

$\square$

Literatur

[1] Marden M.: *Geometry of polynomials*, Mathematical Surveys, Vol **3**, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1966

[2] Obreschkoff N.: *Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963